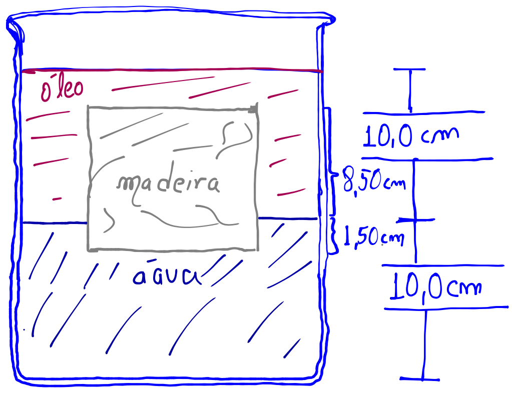
Exercícios

* Um bloco de madeira cúbico com aresta de 10,0cm flutua sobre uma interface entre uma camada de água e uma camada de óleo, com sua base situada 1,50cm abaixo da superfície livre do óleo. A densidade do óleo é 790 kg/cm³. (a) Qual é a pressão manométrica da face superior do bloco? (b) Qual é a pressão na face inferior? (c) Quais são a massa e a densidade do bloco?



Solução.

(a) A pressão na face superior, devida ao óleo é

$$P_s = \rho_{óleo}\, g\, (10 - 8{,}50) \times 10^{-2}$$

$$P_s = 790\,\frac{kg}{m^3} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times 1{,}50 \times 10^{-2}\, m$$

$$P_s = 116{,}13\ Pa$$

(b) $P_{inferior} \equiv P_i$

$$P_i = \rho_{óleo}\, g\, 0{,}10 + \rho_{água}\, g\, 0{,}015 = 790 \times 9{,}8 \times 0{,}10 + 1000 \times 9{,}8 \times 0{,}015$$

$$P_i = 921{,}2\ Pa$$

(c) Peso do bloco é $mg = \rho \cdot 0{,}10^3 \cdot g$.

Esse peso deve ser igual ao empuxo:

Empuxo: Peso do óleo deslocado + peso da água deslocada.

$$E = \rho_{óleo} \cdot 0{,}10 \times 0{,}10 \times 0{,}085 \times g + \rho_{água} \cdot 0{,}10 \times 0{,}10 \times 0{,}015 \times g$$

$$E = 8{,}05N$$

Outra forma de calcular o empuxo:

$$\mathcal{E} = F_{\text{face de baixo}} - F_{\text{face de cima}}$$

$$\mathcal{E} = 921,2 \times 0,1^2 - 116,13 \cdot 0,1^2$$

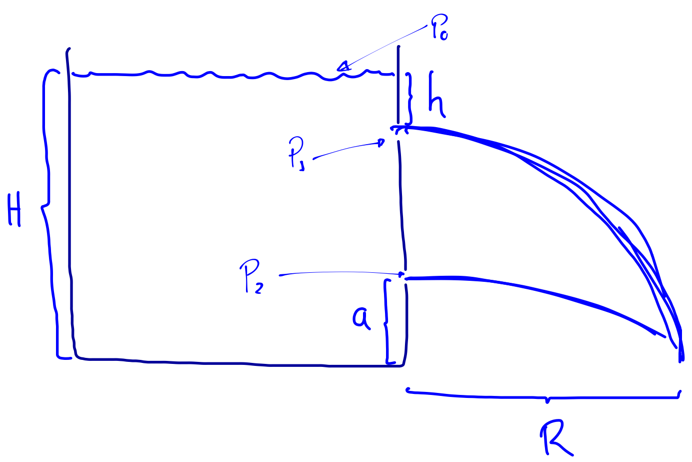
$$\mathcal{E} = 8,05\,N$$

$$\Longrightarrow \rho \cdot 0,1^3 \cdot 9,8 = 8,05$$

$$\rho = 821,4\ \text{kg/m}^3$$

★ A água de um tanque aberto com paredes verticais possui profundidade H. Um orifício é aberto na parede vertical a uma profundidade $\underline{h}$ abaixo da superfície da água.

(a) Qual a distância R entre a base do tanque e o ponto onde a corrente atinge o solo?
(b) A qual distância acima da base do tanque devemos fazer um segundo furo para que a nova corrente alcance a mesma distância $\underline{R}$?



(a) Equação de Bernoulli.

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_0 + \rho g y_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = cte$$

Pressão manométrica $\longrightarrow$ relativa à atmosfera $\longrightarrow$ $P \equiv$ zero na atmosfera.

Tanto em y_0 quanto em y_1, o sistema está em pressão atmosférica:

$$P_0 = P_1 = \text{zero}$$

Se colocarmos a referência em $y_0 = \text{zero}$ $\longrightarrow$ $y_1 = -h$

$$\Rightarrow -\rho g h + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{1}{2}\rho v_0^2$$

Em geral se considera um tanque "grande", tal que o nível baixa tão lentamente que possamos fazer $v_0 = 0$.

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

$\Rightarrow$ Com essa velocidade de saída horizontal calcula-se o alcance levando em conta o tempo de queda.

Tempo de queda:

Percorre uma altura $(H-h)$ com aceleração g.

$$(H-h) = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$\Rightarrow$ Alcance é o que percorre na horizontal: (veloc. constante).

$$R = v_1 . t$$

$$R = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$\boxed{R = \sqrt{4h(H-h)}}$$

(b) Para $y = a$ temos

$$-\rho g (H-a) + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = 0$$

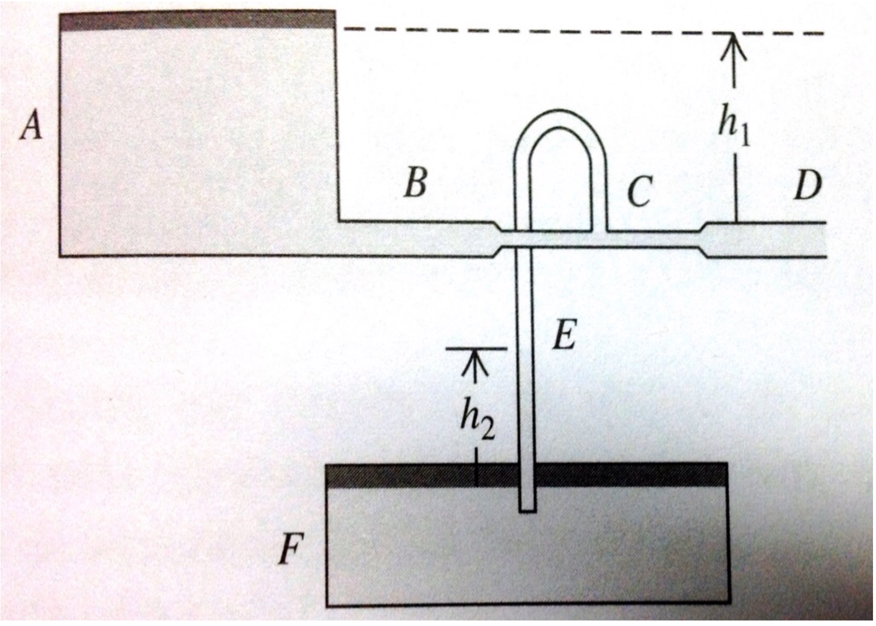
$$v_2 = \sqrt{2g(H-a)}$$

Tempo de queda $t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$

alcance $R' = \sqrt{4a(H-a)}$

$\Rightarrow$ $R' = R$ se $\boxed{a = h}$

★ Problema: Dois grandes tanques abertos $\underline{A}$ e $\underline{F}$ (Figura abaixo) contém o mesmo líquido. Um tubo horizontal BCD, que tem uma constrição $\underline{C}$ e é aberto ao ar no ponto $\underline{D}$, sai da base do tanque $\underline{A}$, e um tubo vertical $\underline{E}$ parte da constrição $\underline{C}$ e mergulha no líquido do tanque F. Suponha um escoamento com linhas de corrente e despreze a viscosidade. Sabendo que a área da seção reta da constrição $\underline{C}$ é a metade da área em $\underline{D}$ e que $\underline{D}$ está a uma distância $\underline{h_1}$ abaixo do nível do líquido no tanque $\underline{A}$, até que altura $\underline{h_2}$ o líquido subirá no tubo $\underline{E}$? Expresse sua resposta em termos de h_1.



Solução: Note que se não houvesse líquido no tanque superior, então $\underline{h_2} = 0$ pois a pressão seria a mesma dentro da constrição e sobre o tanque $\underline{F}$.

Se, no entanto, líquido estiver escoando pelo cano BCD, teremos que a pressão em $\underline{C}$ deve ser menor que em $\underline{D}$, afinal, pela equação da continuidade:

$$A_c v_c = A_D v_D$$

$$\frac{v_c}{v_D} = \frac{A_D}{A_c} \Longrightarrow \text{como } A_D > A_c \Longrightarrow v_c > v_D.$$

⟹ Aplicando a equação de Bernoulli em $\underline{C}$ e $\underline{D}$:

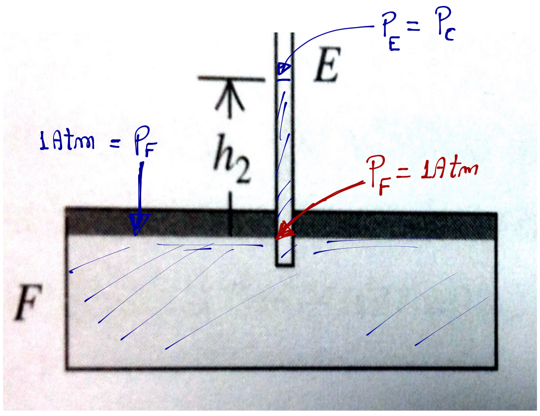
$$\Longrightarrow P_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = P_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

$$\Longrightarrow P_c = P_D + \frac{1}{2}\rho\left(v_D^2 - v_c^2\right)$$

Como $v_c > v_D$ ⟶ o segundo termo é negativo e $P_c < P_D$.

Por outro lado, note que $P_D = 1\text{Atm}$; logo $P_c < 1\text{Atm}$. Como $\underline{C}$ está ligado ao tubo $\underline{F}$ ⟹ A pressão dentro da constrição é menor que 1Atm e o líquido deve subir pela constrição.

$\Longrightarrow$ Temos então que dentro da constrição a pressão é P_c.



Direcionando nossa atenção exclusivamente ao sistema inferior, temos que:

$$P_F = 1Atm \quad e \quad P_F = P_c + \rho g h_2$$

$$\Longrightarrow P_c + \rho g h_2 = 1Atm$$

$$\Longrightarrow h_2 = \frac{1Atm - P_c}{\rho g}$$ ✱

Portanto, precisamos encontrar a pressão $\underline{P_c}$.

Aplicando a equação de Bernoulli em $\underline{A}$ e $\underline{D}$

$$\Longrightarrow P_A + \rho g h_1 = P_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

Obs: Escolhi o referencial em $\underline{D}$.

Note que $P_A = P_D = 1Atm$

$$\Longrightarrow \cancel{P_A} + \rho g h_1 = \cancel{P_D} + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

$$v_D = \sqrt{2gh_1}$$

Pela equação da continuidade:

$$\Longrightarrow v_c = \frac{A_D}{A_c} v_D$$

$$\Longrightarrow v_c = \frac{A_D}{A_c}\sqrt{2gh_1}$$

Como $A_c = 0,5 A_D$:

$$v_c = 2\sqrt{2gh_1}$$

$$v_c = \sqrt{8gh_1}$$

Mas qual a pressão em $\underline{C}$?

Apliquemos Bernoulli nos pontos $\underline{C}$ e $\underline{D}$

$$P_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = P_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

"Já fizemos isso no início".

$$P_c = P_D + \frac{1}{2}\rho\left(v_D^2 - v_c^2\right)$$, sendo $v_c = 2v_D$

$$P_c = P_D + \frac{1}{2}\rho\left(v_D^2 - 4v_D^2\right)$$

$$P_c = P_D - \frac{3}{2}\rho v_D^2 \qquad \text{"Usando } v_D = \sqrt{2gh_1}\text{"}$$

$$P_c = P_D - \frac{3}{\cancel{2}}\rho \cdot \cancel{2}gh_1$$

$$P_c = P_D - 3\rho g h_1 \longrightarrow P_c = 1Atm - 3\rho g h_1$$

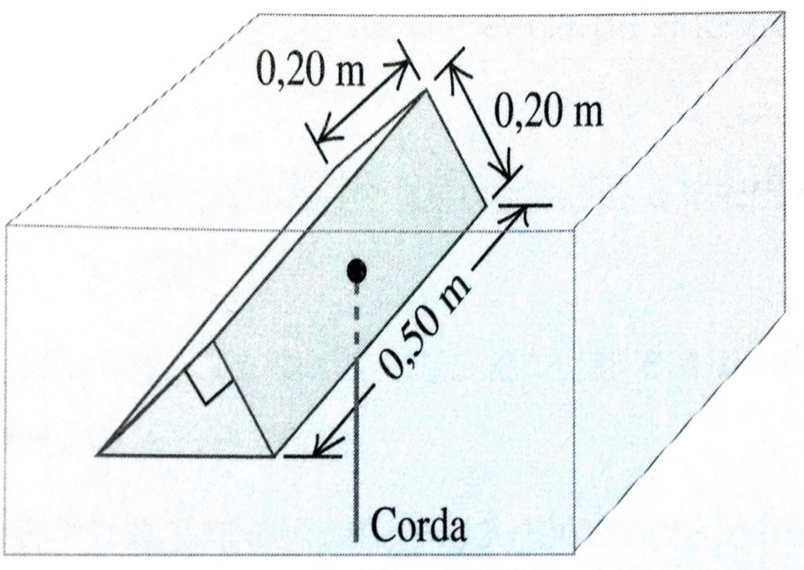
Este resultado na equação para h_2 (*):

$$h_2 = \frac{1Atm - P_c}{\rho g}$$

$$h_2 = \frac{\cancel{1Atm} - \cancel{1Atm} + 3\rho g h_1}{\rho g}$$

$$\boxed{h_2 = 3h_1}$$

Problema: Suponha um bloco de isopor, $\rho = 180\ kg/m^3$, mantido totalmente imerso na água (Figura abaixo). (a) Qual é a tensão na corda? "Faça o cálculo usando o princípio de Arquimedes". (b) Use a equação $P = P_0 + \rho g h$ para calcular diretamente a força exercida pela água sobre as duas faces inclinadas e sobre a base do isopor; a seguir mostre que a soma vetorial dessas forças é a força de empuxo.

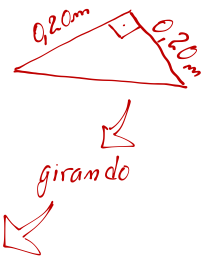


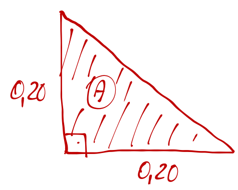
Solução:

(a) Pelo princípio de Arquimedes o empuxo é igual ao peso da água deslocada:

$$\mathcal{E} = \rho_{água} V_{isopor} \times g$$

$$V_{isopor} = \underbrace{\text{Área base}}_{\text{Área do triângulo}} \times \underbrace{\text{altura}}_{0{,}50\,m}$$





$$A = \frac{0{,}20 \times 0{,}20}{2} = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02\,m^2$$

$$V_{isopor} = 0{,}02 \times 0{,}50\,m^3$$

$$V_{isopor} = 0{,}01\,m^3$$

$$\mathcal{E} = \rho_{água} \times 0{,}01 \times g$$

$$\mathcal{E} = 1000 \times 0{,}01 \times 9{,}8\,N$$

$$\mathcal{E} = 10 \times 9{,}8$$

$$\boxed{\mathcal{E} = 98\,N}$$

O peso é $P = \rho_{isopor} V_{isopor}\, g$

$$P = 180 \times 0{,}01 \times 9{,}8\,N$$

$$\boxed{P = 17{,}64\,N}$$

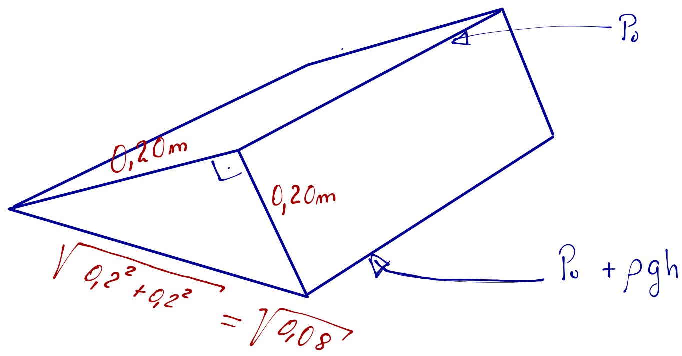
A corda deve suportar $F = \mathcal{E} - P$

$$F = (98 - 17{,}64)\,N$$

$\boxed{F = 80{,}36\,N}$, na corda.

(b) A força na parte de baixo é $F_B = P_0 + \rho g h$

Onde P_0 é a pressão em algum ponto de referência. Podemos colocar a referência em qualquer ponto. Escolho o topo do isopor.



Força no fundo (F_F):

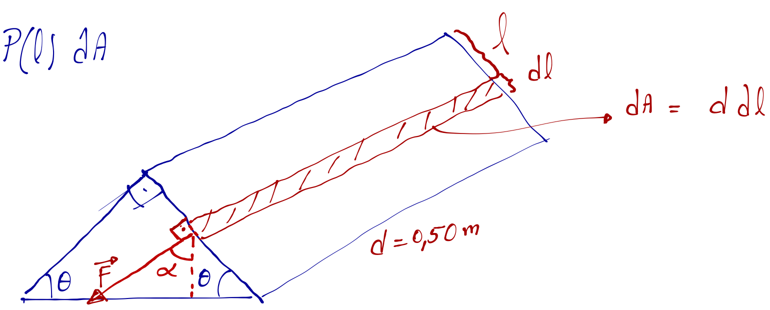
$$F_F = (P_0 + \rho g h) \cdot A_{fundo}$$

Cálculo da força nas faces superiores.

$\Rightarrow$ Note que basta calcular para uma das faces e multiplicar por dois.

Note também que nas faces superiores a pressão varia com a profundidade, portanto, devemos obter a força através de uma integral.

$dF = P(l)\, dA$



$\theta = 45°$

$$dF = P(l)\, d \cdot dl$$

Note que $\theta + 90° + 90° - \alpha = 180°$

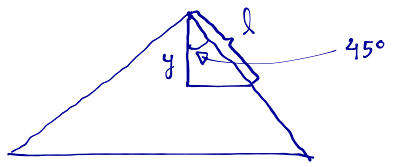
$$\Rightarrow \alpha = \theta$$

Como todos os dF devem se projetados verticalmente para baixo:

$$dF_{vertical} = dF \cos(\theta)$$

$$dF_v = P(l)\, d \cos(\theta)\, dl$$

Obtenção de $P(y)$:



$$P(\ell) = P_0 + \rho g y$$

mas $\quad \ell \cos(45°) = y$

$$P(\ell) = P_0 + \rho g \, \ell \cos(45°)$$

$$dF_v = \left(P_0 + \rho g \ell \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d \cos(\theta) \, d\ell$$

$$F_v = \int dF_v = \int_0^{0{,}20\,m} P_0 \, d \cos(\theta) \, d\ell + \int_0^{0{,}20\,m} \rho g \ell \frac{\sqrt{2}}{2} d \cos(\theta) \, d\ell$$

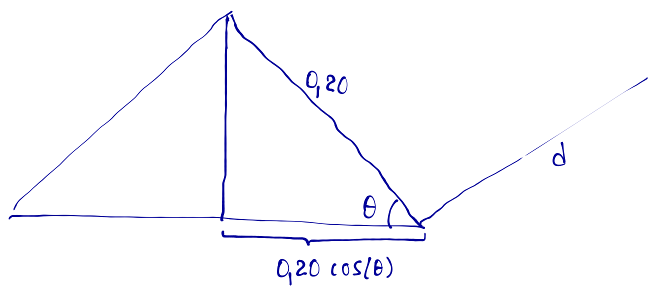
$$F_v = P_0 \, d \cos(\theta) \, 0{,}20 + \rho g \frac{\sqrt{2}}{2} d \cos(\theta) \left[\frac{\ell^2}{2}\right]_0^{0{,}20}$$

$$F_v = P_0 \, d \cos(\theta) \, 0{,}20 + \rho g \frac{\sqrt{2}}{4} d \cos(\theta) \, 0{,}20^2$$

Este valor deve ser multiplicado por dois (duas faces).

$$F_v \text{ (total para baixo)} = 2 P_0 \, d \cos(\theta) \, 0{,}20 + 2 \rho g \frac{\sqrt{2}}{4} d \cos(\theta) \, 0{,}20^2$$

Note agora que



$0{,}20 \cos(\theta) \, d$ = Metade da área abaixo $\Longrightarrow$ Na verdade a projeção da área inclinada.

$\Longrightarrow$ $0{,}20 \cos(\theta) \, d \times 2$ = Área total

$$\Longrightarrow 0{,}20 \cos(\theta) \, d \cdot 2 P_0 = P_0 \times A_{fundo}$$

Vetorialmente F_v é para baixo e $F_F = (P_0 + \rho g h) \cdot A_{fundo}$ é para cima.

A força resultante de Empuxo $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = F_F - F_v$$

$$\mathcal{E} = (P_0 + \rho g h) \times A_{fundo} - \left\{ P_0 A_{fundo} + 2 \rho g \frac{\sqrt{2}}{4} d \cos(\theta) \, 0{,}20^2 \right\}$$

$$\mathcal{E} = \cancel{P_0 A_{fundo}} + \rho g h A_{fundo} - \cancel{P_0 A_{fundo}} - 2 \rho g \frac{\sqrt{2}}{4} d \cos(\theta) \, 0{,}20^2 \}$$

Mas $h = 0{,}20 \cos(45^\circ)$

$$h = \frac{0{,}20\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathcal{E} = \rho g\, 0{,}20 \frac{\sqrt{2}}{2} A_{fundo} - 2 \rho g \frac{\sqrt{2}}{4} d \cos(\theta)\, 0{,}20 \times 0{,}20$$

No segundo termo façamos $0{,}20 \times \cos(\theta) \times 2 \times d = A_{fundo}$

$$\mathcal{E} = \rho g\, 0{,}20 \frac{\sqrt{2}}{2} A_{fundo} - \rho g \frac{\sqrt{2}}{4} 0{,}20\, A_{fundo}$$

$$\mathcal{E} = \rho g\, 0{,}20 \frac{\sqrt{2}}{2} A_{fundo} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\rho g\, 0{,}20 \sqrt{2}\, A_{fundo}}{4} \qquad \text{"}\rho = \rho_{água}\text{"}$$

Fazendo o cálculo, usando $A_{fundo} = 0{,}20\, d \cos(\theta)\, 2$; $\rho_{água} = 1000\ kg/m^3$;

$\theta = 45^\circ$; $d = 0{,}50 m$; $g = 9{,}8\ m/s^2$

$$\mathcal{E} = \frac{1000 \times 0{,}20 \times \cancel{\sqrt{2}} \times 0{,}20 \times 0{,}50 \times \cancel{\sqrt{2}} \times \cancel{2} \times 9{,}8}{\cancel{4}^{\,2} \times \cancel{2}}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1000 \times 0{,}20^2 \times 0{,}50 \times 9{,}8}{2}\ N$$

$$\mathcal{E} = 250 \times 0{,}20^2 \times 9{,}8\ N$$

$\boxed{\mathcal{E} = 98 N}$ $\longrightarrow$ Mesmo valor calculado usando o princípio de Arquimedes

Vamos analisar a equação encontrada para o empuxo:

$$\mathcal{E} = \frac{\rho g\, 0{,}20 \sqrt{2}\, A_{fundo}}{4}$$

Será que esta expressão coincide com o peso da água deslocada $\rho g V_{isopor}$?

$V_{isopor} = A_{fundo} \times h/2$, mas $h = 0{,}20 \cos(45^\circ) = \frac{0{,}20\sqrt{2}}{2}$

$$V_{isopor} = A_{fundo} \frac{0{,}20\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathcal{E} = \rho g V_{isopor}$$

$$\mathcal{E} = \rho g \, 0{,}20 \frac{\sqrt{2}}{4} A_{fundo}$$ "Como obtido acima"